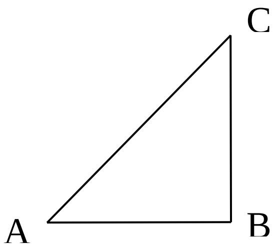
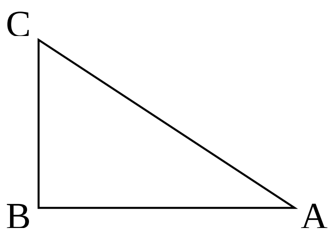
selftics
a self-development cell
www.selftics.com
info.selftics@gmail.com
01535114660 (Abdur Razzak)

ত্রিকোণমিতির সূত্রাবলি (Trigonometric Formulas)

সমকোণী ত্রিভুজ (Right angled triangle):

যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ (অর্থাৎ 90^o), তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে।
সমকোণের বিপরীত বাহুকে বলা হয় অতিভুজ। সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের একটিকে ভূমি এবং অন্যটিকে লম্ব বা উন্নতি বলে।
*সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু। সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ ভিন্ন অন্য দুটি কোণ হবে সূক্ষ্মকোণ।
সমকোণী ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণ পরস্পরের পূরক অর্থাৎ সমকোণ ভিন্ন অন্য দুটি কোণের যোগফল 90^o হবে।





ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B$ = সমকোণ, AC অতিভুজ। (সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ বলে)
$\angle A$ এর সাপেক্ষে BC লম্ব এবং AB ভূমি।
$\angle C$ এর সাপেক্ষে AB লম্ব এবং BC ভূমি। (যে কোণের সাপেক্ষে বা প্রেক্ষিতে তার বিপরীত বাহু লম্ব)
$\angle A$, $\angle C$ প্রত্যেকটি কোণই সূক্ষ্মকোণ।

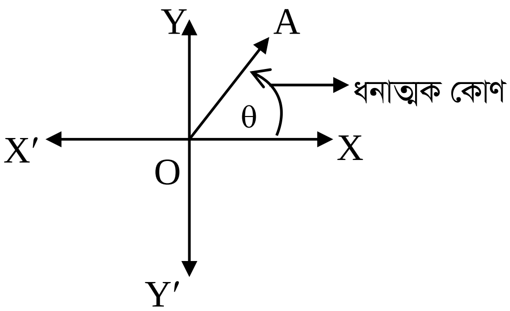
পীথাগোরাসের উপপাদ্য : একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
*অর্থাৎ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অপর দুই বাহু লম্ব ও ভূমির বর্গের যোগফলের সমান।

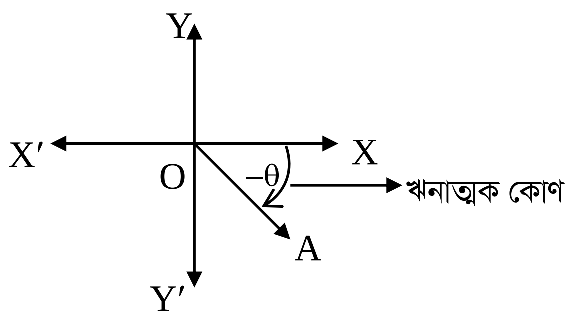
$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$ $\qquad$ ΔABC-এ $AC^2 = BC^2 + AB^2$

ত্রিকোণমিতিক কোণ : ত্রিকোণমিতিতে কোণের উৎপত্তি হয় একটি রশ্মির প্রান্তকে কেন্দ্র করে ঘূর্ণনের ফলে। একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে পৌঁছাতে যে পরিমাণে আবর্তিত হয় তা দ্বারা সৃষ্ঠ কোণের পরিমাণ হলো ত্রিকোণমিতিক কোণ।

ধনাত্মক কোণ (Positive angle) : কোণ রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক কোণ (Positive angle) বলে।

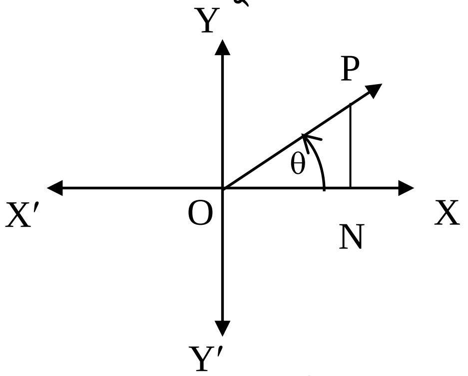
ঋনাত্মক কোণ (Negative angle) : কোণ রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ঋনাত্মক কোণ (Negative angle) বলে।

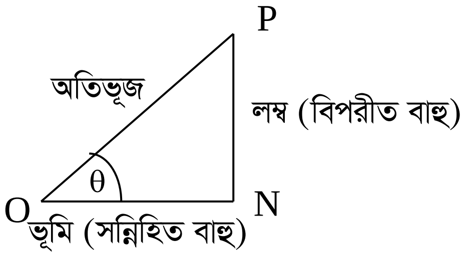




selftics # 2

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :-





$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PN}{OP} \qquad \text{cosec}\,\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PN}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{ON}{OP} \qquad \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OP}{ON}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{ভূমি}} = \frac{PN}{ON} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{ON}{PN}$$

θ কোণের sine (সাইন) অনুপাতকে সংক্ষেপে sin θ
θ কোণের cosine (কোসাইন) অনুপাতকে সংক্ষেপে cos θ
θ কোণের tangent (ট্যানজেন্ট) অনুপাতকে সংক্ষেপে tan θ
θ কোণের cosecant (কোসেক্যান্ট) অনুপাতকে সংক্ষেপে cosec θ
θ কোণের secant (সেক্যান্ট) অনুপাতকে সংক্ষেপে sec θ
θ কোণের cotangent (কোট্যানজেন্ট) অনুপাতকে সংক্ষেপে cot θ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মুসলিম গণিতবিদ আল বাত্তানী (৮৫৮-৯২৯ খ্রিঃ) সর্বপ্রথম sine, cosine, tangent, cotangent, secant এবং cosecant অনুপাতগুলির সঠিক ব্যাখ্যা করেন।

*লক্ষনীয় যে, sin θ প্রতীকটি θ কোণের sine (সাইন)-এর অনুপাতকে বোঝায়; sin ও θ এর গুণফলকে নয়। θ বাদে sin আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পারিক সম্পর্ক :

1(i) $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ 1(ii) $\sin\theta = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta}$ 2(i) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ 2(ii) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

3(i) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ 3(ii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ 4(i) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 4(ii) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (সূত্রাবলি) :

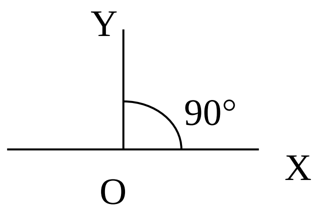
1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 1(i) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 1(ii) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
2. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ 2.(i) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ 2(ii) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

কোণ পরিমাপের একক :

1. ষাটমূলক পদ্ধতির একক (ডিগ্রী পরিমাপ) : এক সমকোণ (90^o)-কে সমান 90 ভাগে ভাগ করে এক ভাগকে এক ডিগ্রী (1° = One degree) ধরা হয়।

1 সমকোণ = 90^o (ডিগ্রী)
1° = $60'$ (মিনিট)
$1'$ = $60''$ (সেকেন্ড)

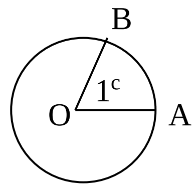
$$\boxed{1' = \left(\frac{1}{60}\right)^o; \quad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'}$$



selftics # 3

2. বৃত্তীয় পদ্ধতির একক (রেডিয়ান পরিমাপ) : কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকেই এক রেডিয়ান কোণ বলে এবং একে 1^c চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, 1^c = এক রেডিয়ান



কোণের ডিগ্রী ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক :

(i) $1^c = 1$ রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ (ii) π রেডিয়ান = 2 সমকোণ = $180°$ (iii) $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে $D°$ এবং $R°$ হলে $D° = \left(D\times\frac{\pi}{180}\right)^c = R^c$

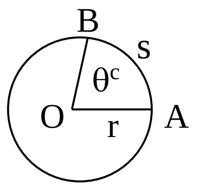
$1°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

প্রতিজ্ঞা : রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।

অনুসিদ্ধান্ত : যেকোন দুইটি বৃত্তে যেকোন দইটি রেডিয়ান কোণ পরস্পর সমান।

প্রতিজ্ঞা : যে কোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সব সময় সমান এবং একটি ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাটিকে গ্রিক বর্ণ π দ্বারা প্রকাশ করা হয়। π এর মান একটি অমূলদ সংখ্যা এবং এর আসন্ন মান $\pi = 3.1416$

প্রতিজ্ঞা : r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে s দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ কেন্দ্রে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করলে $s = r\theta$ হবে।



AB = s
OA = r
$\angle AOB = \theta^c$

কখন $s = r\theta$ ব্যবহার করা যাবে ?

যখন কোণ (θ)-কে রেডিয়ানে এবং s ও r কে একই এককে (যেমন দুইটি মিটারে বা দুইটি সে.মি. এ) প্রকাশ করা হবে তখনই $s = r\theta$ ব্যবহার যাবে।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান :

কোণ (θ) / অনুপাত	$0°$ বা 0	$30°$ বা $\frac{\pi}{6}$	$45°$ বা $\frac{\pi}{4}$	$60°$ বা $\frac{\pi}{3}$	$90°$ বা $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত ($\pm\infty$)
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

selftics # 4

$\sin n\pi = 0$, $\sin 2n\pi = 0$, $\tan n\pi = 0$ **এবং** $\cos n\pi = (-1)^n$, $\cos 2n\pi = 1$ যেখানে $n = 0, 1, 2,$

কোণ(θ) / অনুপাত	0°	30°	45°	60°	90°
(i) sin	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
(ii) cos	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$
(iii) tan	$\sqrt{\frac{0}{3}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{3}} = 1$	$\sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত$\left(= \frac{1}{0}\right)$

টীকা : (i) 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে sin 0°, sin 30°, sin 45°, sin 60° এবং sin 90° এর মান পাওয়া যায়।

(ii) 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে cos 0°, cos 30°, cos 45°, cos 60° এবং cos 90° এর মান পাওয়া যায়।

(iii) 0, 1, 3, এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে tan 0°, tan 30°, tan 45° এবং tan 60° এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, tan 90° সংজ্ঞায়িত নয়)।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা :

(i) θ এর মান যত বড় বা ছোটই হোকনা কেন, θ কোণের যে কোনো মানের জন্য sin θ এবং cos θ এর সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$ হবে।

অর্থাৎ, $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$ যেমন : sin 30° = 0.5 cos 90° = 0

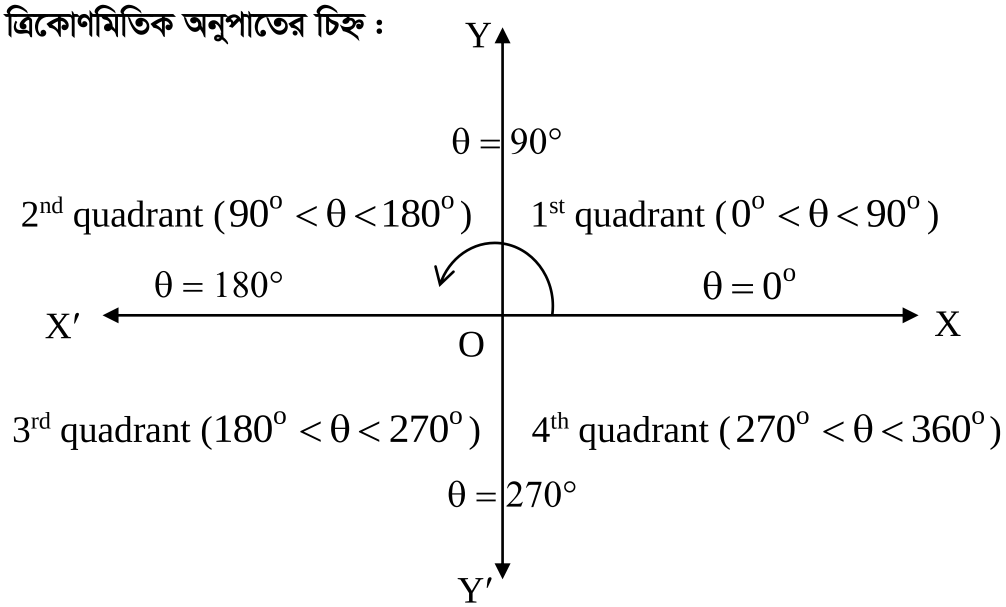
(ii) cosec θ এবং sec θ এর মান -1 অপেক্ষা ছোট কিংবা $+1$ অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

অর্থাৎ, cosec θ এবং sec θ এর মান কখন -1 থেকে $+1$ এর মধ্যবর্তী হবে না। যেমন : $\text{cosec } 45° = \sqrt{2}$

(iii) tan θ এবং cot θ এর মানের কোন সীমা নির্ধারণ করা যায় না অর্থাৎ θ কোণের যে কোনো মানের জন্য tan θ এবং cot θ এর মান যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে।

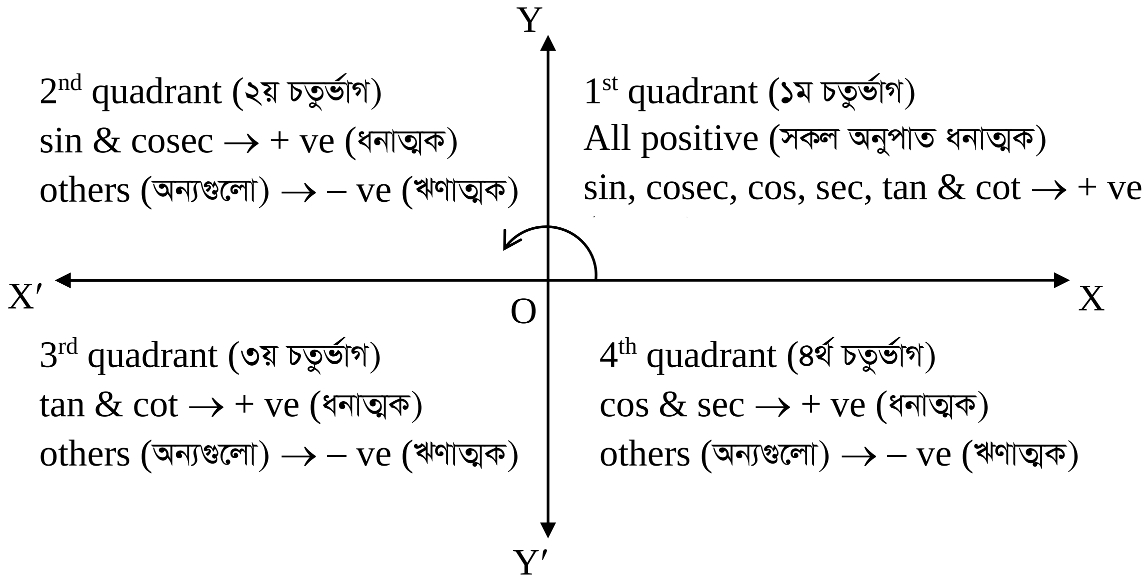
θ এর মান সামান্য (খুব ছোট) হলে- $\sin\theta \approx 0$ **ও** $\tan\theta \approx 0$ **এবং** $\cos\theta \approx 1$

বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন :



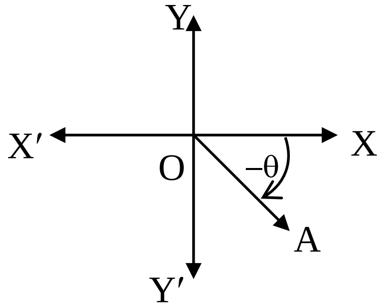
ঘড়ির কাঁটার বিপরীত (Anti-clockwise) দিককে ধনাত্মক দিক ধরা হয়।

selftics # 5



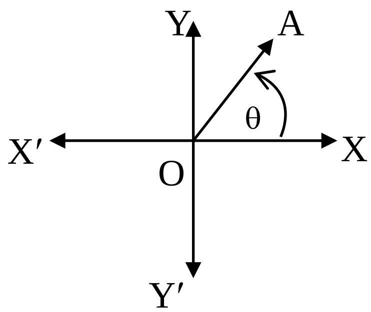
সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : $-\theta$, $90^o \pm \theta$, $180^o \pm \theta$, $270^o \pm \theta$, $360^o \pm \theta$, ……. এরূপ কোণকে θ কোণের সংযুক্ত কোণ বলা হয়, যখন $0° < \theta < 90^o$

$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :



1(i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 1(ii) $\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
2(i) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ 2(ii) $\sec(-\theta) = \sec\theta$
3(i) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ 3(ii) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

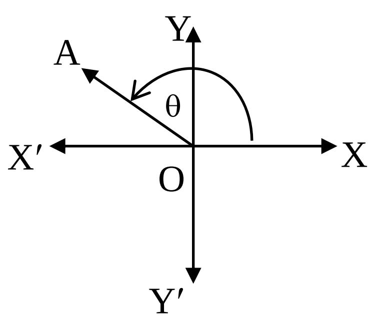
$(90^o - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :



1(i) $\sin(90^o - \theta) = \cos\theta$ 1(ii) $\text{cosec}(90^o - \theta) = \sec\theta$
2(i) $\cos(90^o - \theta) = \sin\theta$ 2(ii) $\sec(90^o - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
3(i) $\tan(90^o - \theta) = \cot\theta$ 3(ii) $\cot(90^o - \theta) = \tan\theta$

$(90^o + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

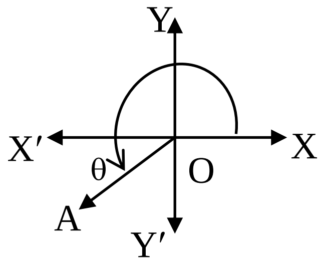
1(i) $\sin(90^o + \theta) = \cos\theta$ 1(ii) $\text{cosec}(90^o + \theta) = \sec\theta$
2(i) $\cos(90^o + \theta) = -\sin\theta$ 2(ii) $\sec(90^o + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
3(i) $\tan(90^o + \theta) = -\cot\theta$ 3(ii) $\cot(90^o + \theta) = -\tan\theta$



$(180^o - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

1(i) $\sin(180^o - \theta) = \sin\theta$ 1(ii) $\text{cosec}(180^o - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
2(i) $\cos(180^o - \theta) = -\cos\theta$ 2(ii) $\sec(180^o - \theta) = -\sec\theta$
3(i) $\tan(180^o - \theta) = -\tan\theta$ 3(ii) $\cot(180^o - \theta) = -\cot\theta$

$(180^o + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :



1(i) $\sin(180^o + \theta) = -\sin\theta$ 1(ii) $\text{cosec}(180^o + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
2(i) $\cos(180^o + \theta) = -\cos\theta$ 2(ii) $\sec(180^o + \theta) = -\sec\theta$
3(i) $\tan(180^o + \theta) = \tan\theta$ 3(ii) $\cot(180^o + \theta) = \cot\theta$

selftics # 6

সংযুক্ত কোণ $n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta = n\times 90^o \pm \theta$ (যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম :

1(i) $\sin(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \sin(n\times 90^o \pm \theta) = *\cos\theta$ যখন n বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 1, 3, 5, …..

1(ii) $\sin(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \sin(n\times 90^o \pm \theta) = *\sin\theta$ যখন n জোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 2, 4, 6, …..

2(i) $\cos(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \cos(n\times 90^o \pm \theta) = *\sin\theta$ যখন n বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 1, 3, 5, …..

2(ii) $\cos(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \cos(n\times 90^o \pm \theta) = *\cos\theta$ যখন n জোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 2, 4, 6, …..

3(i) $\tan(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \tan(n\times 90^o \pm \theta) = *\cot\theta$ যখন n বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 1, 3, 5, …..

3(ii) $\tan(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \tan(n\times 90^o \pm \theta) = *\tan\theta$ যখন n জোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 2, 4, 6, …..

4(i) $\cot(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \cot(n\times 90^o \pm \theta) = *\tan\theta$ যখন n বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 1, 3, 5, …..

4(ii) $\cot(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta) = \cot(n\times 90^o \pm \theta) = *\cot\theta$ যখন n জোড় পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ n = 2, 4, 6, …..

$*\rightarrow +$ হবে যদি $(n\times 90^o \pm \theta)$ যে চতুর্ভাগে অবস্থান করবে সেখানে প্রদত্ত অনুপাত ধনাত্মক হয়।

$*\rightarrow -$ হবে যদি $(n\times 90^o \pm \theta)$ যে চতুর্ভাগে অবস্থান করবে সেখানে প্রদত্ত অনুপাত ঋনাত্মক হয়।

যেমন : $\sin(90^o - \theta) = \cos\theta$; $\sin(3\times 90^o - \theta) = -\cos\theta$, $\sin(5\times 90^o + \theta) = \cos\theta$ ইত্যাদি।

$\sin(2\times 90^o - \theta) = \sin\theta$; $\sin(4\times 90^o - \theta) = -\sin\theta$, $\sin(6\times 90^o + \theta) = -\cos\theta$ ইত্যাদি।

যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : দুই বা ততোধিক কোণের সমষ্টি অথবা অন্তরফলকে যৌগিক কোণ বলে।
যেমন : A + B, A – B, A + B + C ইত্যাদি।

1(i) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ………… (i)
1(ii) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ………… (ii)
2(i) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ………… (iii)
2(ii) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ ………... (iv)

3(i) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 3(ii) $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

4(i) $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ 4(ii) $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

5(i) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

5(ii) $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

রূপান্তর সূত্র : গুণ হতে যোগে রূপান্তর :-

1(i) $2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ [(i) ও (ii) যোগ করে]
1(ii) $2\cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ [(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে]
2(i) $2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ [(iii) ও (iv) যোগ করে]
2(ii) $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ [(iv) থেকে (iii) বিয়োগ করে]

selftics # 7

রূপান্তর সূত্র : যোগ হতে গুণে রূপান্তর :-

1(i) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

1(ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

2(i) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

2(ii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ 2(iii) $\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

ধরি, $A + B = C$ এবং $A - B = D$
তাহলে, $A = \frac{C+D}{2}$ এবং $B = \frac{C-D}{2}$

গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : 2A, 3A, 4A ইত্যাদি A কোণের গুণিতক কোণ।

1. $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

2(i) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

2(ii) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

2(iii) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

2(iv) $1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$

2(v) $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$

3(i) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

3(ii) $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

4(i) $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

4(ii) $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

5(i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

5(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

6(i) $\sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)$

6(i) $\cos^3 A = \frac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A)$

7. $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{3}A$ প্রভিতি A কোণের উপগুণিতক কোণ।

1. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ [$A = \frac{\theta}{2}$ বসিয়ে]

2(i) $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$ 2(ii) $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ 2(iii) $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

2(iv) $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

2(v) $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

3(i) $\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

3(ii) $\cot\theta = \frac{\cot^2\frac{\theta}{2} - 1}{2\cot\frac{\theta}{2}}$

4(i) $\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

4(ii) $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

5(i) $\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$ [$A = \frac{\theta}{3}$ বসিয়ে] 5(ii) $\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$

5(iii) $\tan\theta = \frac{3\tan\frac{\theta}{3} - \tan^3\frac{\theta}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{\theta}{3}}$

selftics # 8

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ :

$\sin 0 = 0$	$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
$\cos 0 = 1$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\tan 0 = 0$	$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan\frac{\pi}{4} = 1$	$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

1(i) $\sin\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$

1(ii) $\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

1(iii) $\tan\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$

1(iv) $\cot\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

2(i) $\sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

2(ii) $\cos\theta = \cos\alpha$ হলে, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

3. $\tan\theta = \tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$

4(i) $\sin\theta = 1$ হলে, $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

4(ii) $\cos\theta = 1$ হলে, $\theta = 2n\pi$

5(i) $\sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

5(ii) $\cos\theta = -1$ হলে, $\theta = (2\pi+1)\pi$

যখন n এর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋনাত্মক যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$ আকারের সমীকরণ সমাধান করতে উভয় পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করতে হয়।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন : $\sin\theta = x$ হলে $\theta = \sin^{-1}x$ (সাইন ইনভার্স x) অর্থাৎ, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ।

1(i) $\sin^{-1}\sin\theta = \theta$ 1(ii) $\cos^{-1}\cos\theta = \theta$ 1(iii) $\tan^{-1}\tan\theta = \theta$

2(i) $\sin\sin^{-1}x = x$ 2(ii) $\cos\cos^{-1}x = x$ 2(iii) $\tan\tan^{-1}x = x$

3(i) $\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ 3(ii) $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

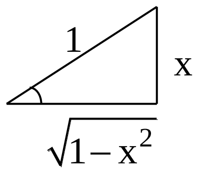
4(i) $\cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x}$ 4(ii) $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

5(i) $\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$ 5(ii) $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\sin^{-1}x \neq \sin^{-1}\sin x\\ \cos\cos^{-1}x \neq \cos^{-1}\cos x\\ \tan\tan^{-1}x \neq \tan^{-1}\tan x\end{array}}$$

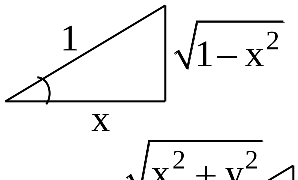
বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের রূপান্তর :

1. $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



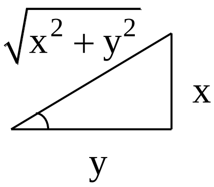
চিত্র- 1(i)

2. $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



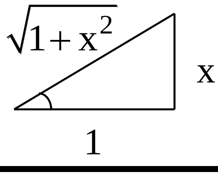
চিত্র- 1(ii)

3. $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



চিত্র- 1(iii)

4. $\tan^{-1}\frac{x}{y} = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$



চিত্র- 1(iv)

selftics # 9

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের সূত্রাবলী :

1(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ 1(ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ 1(iii) $\text{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

2(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ 2(ii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

2(iii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

3(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\}$

3(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right\}$

3(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right\}$

3(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right\}$

4(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ 4(ii) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$

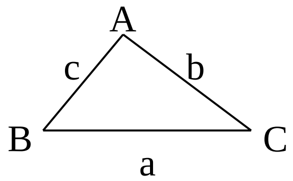
4(iii) $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

5(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$ 5(ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^2-3x)$

5(iii) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

ত্রিভুজের গুণাবলী :

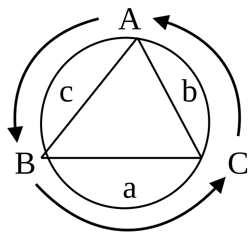
যে কোনো ত্রিভুজ ABC-এর জন্য $\angle CAB=\angle A=A$, $\angle ABC=\angle B=B$, $\angle BCA=\angle C=C$
এবং A, B, C কোণগুলির বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয়।
আবার, যে কোনো ত্রিভুজ ABC-এর জন্য A + B + C = π = 180°



সাইন সূত্র : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ যেখানে R হলো পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।
অর্থাৎ, যে কোনো ত্রিভুজে বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বিপরীত কোণের সইন (sine)-এর সমানুপাতিক।

কোসাইন সূত্র : যে কোনো ত্রিভুজ ABC-এর জন্য

1(i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ অথবা, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$



1(ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ অথবা, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

1(iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ অথবা, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2(i) $a = b\cos C + c\cos B$ 2(ii) $b = c\cos A + a\cos C$ 2(iii) $c = a\cos B + b\cos A$

selftics # 10

ট্যানজেন্ট সূত্র :

(i) $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ (ii) $\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$ (iii) $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

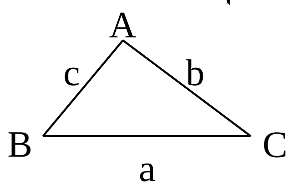
ত্রিভুজের অর্ধ-কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

1(i) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 1(ii) $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$ 1(iii) $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

2(i) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ 2(ii) $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ 2(iii) $\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

3(i) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ 3(ii) $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ 3(iii) $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

যেখানে s হলো ত্রিভুজের অর্ধ-পরিসীমা অর্থাৎ, $s=\frac{a+b+c}{2}$



4(i) $\tan\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$ 4(ii) $\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ 4(iii) $\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

5(i) $\cot\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{\Delta}$ 5(ii) $\cot\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{\Delta}$ 5(iii) $\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{\Delta}$

যেখানে ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল = Δ

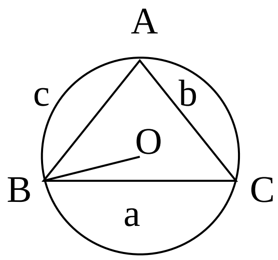
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle) :

ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল, $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}$ যেখানে $s=\frac{a+b+c}{2}$

$=\frac{1}{2}bc\ \sin A=\frac{1}{2}ca\ \sin B=\frac{1}{2}ab\ \sin C$

$=\frac{1}{2}$ (দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফল $\times$ বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন)

$=\frac{abc}{4R}$ যেখানে R = OB হলো পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।



ত্রিভুজের কোণের সাইন (sine) :

(i) $\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$ (ii) $\sin B=\frac{2\Delta}{ca}$ (iii) $\sin C=\frac{2\Delta}{ab}$

মুসলিম গণিতবিদ আবুল ওয়াফাই

(i) sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B

(ii) $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$ এবং (iii) $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ প্রথম আবিষ্কার করেন।