বীজগণিতের সূত্রাবলি (Algebraic Formulas)

1. গাণিতিক প্রতীক ঃ

(i) সংখ্যা প্রতীক : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এই দশটি প্রতীকের সাহায্যে সকল সংখ্যা লেখা যায় বলে এদের সংখ্যা প্রতীক বলা হয়।
সংখ্যা লেখায় ব্যবহৃত সংখ্যা প্রতীককে অঙ্ক বলা হয়। যেমন : 569 একটি তিন অঙ্কের সংখ্যা।

(ii) প্রক্রিয়া প্রতীক বা চিহ্ন : + (যোগ চিহ্ন), – (বিয়োগ চিহ্ন), × (গুণ চিহ্ন), ÷ (ভাগ চিহ্ন) এই চারটি গাণিতিক প্রক্রিয়া চিহ্ন নির্দেশ করে।

(iii) সম্পর্ক প্রতীক : = (সমান), > (বৃহত্তর বা বড়), < (ক্ষুদ্রতর বা ছোট), ≠ (সমান নয়), ≯(বড় নয়), ≮ (ছোট নয়), ≥ (বৃহত্তর অথবা সমান), ≤ (ক্ষুদ্রতর অথবা সমান) ইত্যাদি সম্পর্ক চিহ্ন।

(iv) বন্ধনী প্রতীক : প্রথম বন্ধনী ( ), দ্বিতীয় বন্ধনী { }, তৃতীয় বন্ধনী [ ], রেখা বন্ধনী $\overline{\qquad}$

(v) বিশেষ প্রতীক : যেমন : □

(vi) অক্ষর প্রতীক : যেমন : a ,b, c, x, y ইত্যাদি।
*অজানা সংখ্যা নির্দেশ করতে বিশেষ প্রতীক বা অক্ষর প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

2. বীজগাণিতিক বা বীজগণিতীয় রাশি (Algebric Expression) ঃ
প্রক্রিয়া চিহ্ন, সংখ্যাসূচক প্রতীক ও সংখ্যার অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগণিতীয় রাশিমালা বা সংক্ষেপে রাশি বলে।
যেমন : $5a + 2x^2 - y$.

2.(i) রাশির পদ (Term) ঃ রাশির যে যে অংশগুলো যোগ (+) এবং বিয়োগ (–) চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তাদের প্রত্যেকটিকে ঐ রশিমালার পদ বলে।
যেমন : $5a + 2x^2 - y$ রাশিমালার তিনটি পদ হল $5a$, $2x^2$ ও y

2.(ii) সহগ (Coefficient) ঃ বীজগণিতীয় রাশির কোন পদের সংখ্যা গুণককে ঐ পদের সহগ বলে।
যেমন : $2x^2 + y$ রাশির $2x^2$ ও y পদের সহগ যথাক্রমে 2 ও 1

2.(iii) সদৃশ ও অসদৃশ পদ ঃ বীজগণিতীয় রাশিমালায় অন্তর্ভুক্ত যেসব পদের সহগ ব্যতীত বাকি অংশ একই, তাদের সদৃশ পদ বলা হয়। অন্যথায় পদগুলো অসদৃশ।
যেমন : সদৃশ পদ : $5abx^2y$ এবং $3x^2yab$. অসদৃশ পদ : $2a^2bxy$ এবং $2ab^2xy$
*বীজগণিতীয় রাশিমালায় শুধুমাত্র সদৃশ পদগুলোরই যোগ ও বিয়োগ হয়।

বিয়োজন – বিয়োজ্য = বিয়োগফল

3. বীজগণিতীয় রাশিমালার বন্ধনী স্থাপন ও অপসারণ :

3(i) বন্ধনী অপসারণ : বন্ধনীর আগে (+) চিহ্ন থাকলে বন্ধনী অপসারণে বন্ধনীর ভিতরের কোন পদের চিহ্নের পরিবর্তন হয় না। যেমন : $a + (x - y) = a + x - y$
আর বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন থাকলে বন্ধনী অপসারণে বন্ধনীর ভিতরের সব পদের চিহ্নের পরিবর্তন হবে।
অর্থাৎ (+) চিহ্নযুক্ত পদ (–) চিহ্নযুক্ত এবং (–) চিহ্নযুক্ত পদ (+) চিহ্নযুক্ত হবে।
যেমন : $a - (x - y + z) = a - x + y - z$

বীজগণিতের জনক মুহম্মদ ইবনে মুসা আল খোয়ারেজমী

3(ii) বন্ধনী সংযোজন : (+) চিহ্ন দিয়ে রাশির যেসব পদ বন্ধনীভুক্ত করা হয়, তাদের স্ব স্ব চিহ্ন ঠিক থাকে। আবার (−) চিহ্ন দিয়ে রাশির যেসব পদ বন্ধনীভুক্ত করা হয়, তাদের স্ব স্ব চিহ্ন বিপরীত চিহ্নযুক্ত করে নিতে হয়।

'BODMAS' এর ব্যাখ্যা ঃ

B → Brackets (বন্ধনী)
O → Of (এর)
D → Division (ভাগ)
M → Multiplication (গুণ)
A → Addition (যোগ)
S → Subtraction (বিয়োগ)

Multiplier = গুণক
Multiplicand = গুণ্য
Product = গুণফল

'BODMAS' শব্দটিতে অক্ষরগুলো যে ক্রমে আছে সরলীকরণের কাজগুলো একই ক্রমে করতে হয়। আবার বন্ধনীগুলোর প্রথমে রেখা-বন্ধনী এবং তারপর পর্যায়ক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনীর ভিতরের কাজ করতে হয়।

4. গুণ ও ভাগের সম্পর্ক ঃ গুণ্য × গুণক = গুণফল
গুণফল ÷ গুণ্য = গুণক
গুণফল ÷ গুণক = গুণ্য

যেমন : 25 × 3 = 75
গুণ্য = 25, গুণক = 3 ও গুণফল =75

নিঃশেষে বিভাজ্যের ক্ষেত্রে- ভাজ্য ÷ ভাজক = ভাগফল
ভাজক × ভাগফল = ভাজ্য
ভাজ্য ÷ ভাগফল = ভাজক

যেমন : 60 ÷ 15 = 4, ভাজ্য = 60
ভাজক = 15 এবং ভাগফল = 4

নিঃশেষে বিভাজ্য না হলে-ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ
ভাজক = (ভাজ্য − ভাগশেষ) ÷ ভাগফল
ভাগফল = (ভাজ্য − ভাগশেষ) ÷ ভাজক

যেমন : 2) 25 (12
24
1
এখানে, ভাজক = 2, ভাজ্য = 25,
ভাগফল = 12 এবং ভাগশেষ = 1

N→Dividend (ভাজ্য) D→Divisor (ভাজক)
Q→Quotient (ভাগফল) R→Remainder (ভাগশেষ)

Algebraic fraction (বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ) = $\dfrac{\text{Numerator}}{\text{Denominator}}$

N→Numerator (লব)
D→Denominator (হর)

5(i) স্বীকার্য : বাস্তবিক পক্ষে, যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয় এবং প্রাথমিক ধারণার স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যসমূহকে স্বীকার্য বলা হয়।
অর্থাৎ বিনা তর্কে স্বীকার করে নেয়া বিবৃতিকে স্বীকার্য বলে।

5(ii) প্রতিজ্ঞা : যেকোনো গাণিতিক তত্ত্বে কতিপয় প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা এবং স্বীকার্যের ওপর ভিত্তি করে ধাপে ধাপে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করা হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণত প্রতিজ্ঞা বলা হয়।

5(ii) উপপাদ্য (Theorem) : বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ প্রতিজ্ঞাগুলোকে উপপাদ্য বলা হয়।

5(iv) সূত্র : সূত্র হল চলক সম্বলিত সমীকরণ যেখানে সংশ্লিষ্ট চলকের যেকোনো মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অথবা বীজগাণিতিক প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগাণিতিক সূত্র বা সংক্ষেপে সূত্র বলা হয়।

5(v) অনুসিদ্ধান্ত: কোনো বীজগাণিতিক সূত্র প্রতিষ্ঠিত করে তার সিদ্ধান্ত থেকে এক বা একাধিক যে নতুন সিদ্ধান্ত উপস্থাপিত করা যায়, তাদের অনুসিদ্ধান্ত বলা হয়।

বর্গ নির্ণয়ের সূত্র :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

অনুসিদ্ধান্ত (মান নির্ণয়ের সূত্র) :

সূত্র : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

1(i). $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

1(ii). $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

2(i). $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

2(ii). $(a + b) = \pm\sqrt{(a-b)^2 + 4ab}$

3(i). $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

3(ii). $(a - b) = \pm\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$

4(i). $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$

4(ii). $(a^2 + b^2) = \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

5(i). $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$

5(ii). $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

বর্গ সূত্রের সম্প্রসারণ :

1. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

2. $(a + b - c)^2 = \{a + b + (-c)\}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

3. $(a - b + c)^2 = \{a + (-b) + c\}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

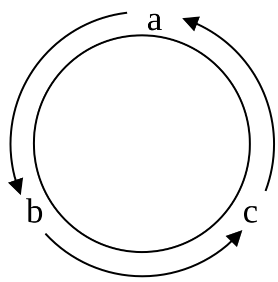
4. $(a - b - c)^2 = \{a + (-b) + (-c\}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

অনুসিদ্ধান্তঃ

1(i). $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

1(ii). $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

অথবা, $(ab + bc + ca) = \dfrac{1}{2}\{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\}$



গুণফল নির্ণয়ের সূত্র :

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ অথবা $(p + x)(q + x) = pq + (p + q)x + x^2$

3. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

অনুসিদ্ধান্তঃ

2(i). $(x + a)(x - b) = (x + a)\{x + (-b)\} = x^2 + (a - b)x - ab$

2(ii). $(x - a)(x + b) = \{x + (-a)\}(x + b) = x^2 + (-a + b)x - ab$

2(iii). $(x - a)(x - b) = \{x + (-a)\}\{x + (-b)\} = x^2 - (a + b)x + ab$

3(i). $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$

4(i). $(a + b)(b + c)(c + a) = ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a + 2abc$
$= a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 2abc$

4(ii). $(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

5. $3(a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

ঘন নির্ণয়ের সূত্র :

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

2. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

3. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

অনুসিদ্ধান্তঃ

1. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

2. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

3(i). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

3(ii). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

উৎপাদক নির্ণয়ের সূত্র :

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

2(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 2(ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3(i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

3(ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

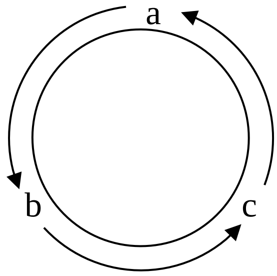
4(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$

4(ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$

5(i) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

5(ii) $a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

5(iii) $a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2$



উচ্চতর গণিতের আরো কিছু প্রয়োজনীয় সূত্র :

1. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$
2. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$
3. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = -(a - b)(b - c)(c - a)$
4. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$
5. $a^2b^2(a^2 - b^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2)$
$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b)(b + c)(c + a)$
7. $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

অনুপাত-সমানুপাত :

1(i) a, b, c, d সমানুপাতিক বলতে বুঝায়, $a : b = c : d$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $bc = ad$

1(ii) a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা, $b^2 = ac$

2(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ অর্থাৎ প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c}{b+d}$

2(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ হলে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$ অর্থাৎ প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e}{b+d+f}$

2(iii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma+nc}{mb+nd}$ অর্থাৎ প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{ma+nc}{mb+nd}$

3(i) $a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ [একান্তর প্রক্রিয়া (একান্তকরণ)]

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ [একান্তকরণ (alternendo)]

3(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ [ব্যস্তকরণ (Invertendo)]

4(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ [যোজন (Componendo)]

4(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন (Dividendo)]

5(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [যোজন-বিয়োজন প্রক্রিয়া]

5(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ [বিয়োজন-যোজন প্রক্রিয়া]

দ্বিঘাত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$

এর সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$