selftics
a self-development cell
www.selftics.com
info.selftics@gmail.com
01535114660 (Abdur Razzak)

Exponent or Index (সূচক বা ঘাত)

সূচক বা ঘাত (Exponent or Index / Power) :

$a\neq 0$ যেকোন বাস্তস সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, a এর n-সংখ্যক গুণফল হচ্ছে- a^{n}

অর্থাৎ, $a\times a\times a........\times a$ (n সংখ্যক বার a) $=a^{n}$ এখানে, $a\rightarrow$ ভিত্তি এবং $n\rightarrow$ সূচক বা ঘাত বা শক্তি।

a^{n} কে a এর n তম ঘাত বা শক্তি (a to the power n) বলা হয়। তবে, a^{2} কে a এর বর্গ (Square) এবং a^{3} কে a এর ঘন (Cube) বলাই প্রচলিত রীতি।

সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।

সূচকের সূত্রাবলী (Index Laws):

ধরি, a, b যেকোন বাস্তব সংখ্যা এবং m, n যেকোন দুইটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ $a\in\mathbb{R};\ m,n\in\mathbb{Q}$

1(i) $a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$ 1(ii) $\dfrac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}\ (m\geq n)$ 1(ii) $\dfrac{a^{m}}{a^{n}}=\dfrac{1}{a^{n-m}}\ (n>m)$

2(i) $(ab)^{n}=a^{n}\times b^{n}$ 2(ii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}=\dfrac{a^{n}}{b^{n}}\quad(b\neq 0)$

3(i) $a^{1}=a,\ a^{n+1}=a^{n}\cdot a$ 3(i) $a^{0}=1,\ (a\neq 0)$ [শূন্য সূচক]

4(i) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}},\ (a\neq 0)$ 4(ii) $\dfrac{1}{a^{n}}=a^{-n},\ (a\neq 0)$ 4(i) $a^{-1}=\dfrac{1}{a},\ (a\neq 0)$

5(i) $\left(a^{m}\right)^{n}=(a^{m})^{n}=a^{mn}$ 5(i) $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}=\left(a^{n}\right)^{m}$

n তম মূল (n-th root)

Rule(নিয়ম) - 1: $a^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ (দ্বিতীয় ঘাত) = a এবং a বর্গমূল (দ্বিতীয় মূল) $=a^{\frac{1}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}}$ কে বর্গমূল চিহ্ন $\sqrt{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt{a}$ আকারে লেখা হয় অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

Rule - 2: $a^{\frac{1}{3}}$ এর ঘন (তৃতীয় ঘাত) = a এবং a ঘনমূল (তৃতীয় মূল) $=a^{\frac{1}{3}}$

$a^{\frac{1}{3}}$ কে ঘনমূল চিহ্ন $\sqrt[3]{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt[3]{a}$ আকারে লেখা হয় অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

Rule - 3: $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত = a এবং a তম মূল $=a^{\frac{1}{n}}$ অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n}=a$ এবং a এর n তম মূল $(a)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ । a এর n তম মূলকে $\sqrt[n]{a}$ আকারে লেখা হয়।

Rule - 4: 4(i) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$ **4(ii)** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}$ **4(iii)** $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}=a^{\frac{m}{n}}$

Rule - 5: $a<0$ এবং $n\in\mathbb{N}\ (n>1)$, n বিজোড় সংখ্যা হলে, $\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|}$

Rule - 6 : যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in \mathbb{Z}$; $n, q \in \mathbb{N}$ $(n > 1, q > 1)$ তবে $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র :

(i) $a > 0, a \neq 1$ শর্তে $a^x = a^y$ হলে, $x = y$ অর্থাৎ দুইটি সূচকী রাশির ভিত্তি একই হলে সূচক দইটি সমান হবে।

(ii) $a > 0, b > 0, x \neq 0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ অর্থাৎ দুইটি সূচকী রাশির সূচক একই হলে ভিত্তি দইটি সমান হবে।

(iii) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = 0$ [যেহেতু $a^x = 1 = a^0$]

(iv) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = 1$ [যেহেতু $a^x = 1 = 1^x$]

(v) $a^{\infty} = \infty$ এবং $a^{-\infty} = 0$ যখন $a > 1$ যেমন : $2^{\infty} = \infty$, $5^{\infty} = \infty$; $2^{-\infty} = 0$, $5^{-\infty} = 0$ ইত্যাদি।

(vi) $a^{\infty} = 0$ এবং $a^{-\infty} = \infty$ যখন $0 < a < 1$ যেমন : $(.5)^{\infty} = 0$, $(.3)^{\infty} = 0$; $(.5)^{-\infty} = \infty$ ইত্যাদি।

Logarithm (লগারিদম)

লগারিদমের সংজ্ঞা (Definition of Logarithm) ঃ কোনো সংখ্যার লগারিদম বলতে প্রদত্ত ভিত্তিকে যে ঘাত (power) বা সূচক (index) এ উন্নীত করলে ঐ সংখ্যার সমান হয়, সেই ঘাত বা সূচককেই বুঝায়।

মনে করি , $a > 0$, $a \neq 1$ এবং N ধনাত্মক সংখ্যা।

যদি $a^x = N$ হয় , তবে x কে N এর a ভিত্তিক লগারিদম সংক্ষেপে log (লগ) বলা হয় এবং লেখা হয় $x = \log_a N$

$x = \log_a N$ কে পড়া হয় "N এর a ভিত্তিক লগ" অথবা "a ভিত্তিক লগ N" (Log of N to the base a).

লক্ষণীয় : x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন a^x সর্বদাই ধনাত্মক সংখ্যা তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম আছে। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার কোনো লগারিদম নাই।

$a^x = N$ এবং $x = \log_a N$ সমার্থক উক্তি অর্থাৎ

(i) যদি $a^x = N$ হয় তবে $\log_a N = x$

(ii) যদি $\log_a N = x$ হয় তবে $a^x = N$

$\therefore$ $\log_a N = x$ যদি ও কেবল যদি $a^x = N$ হয়।

Rule (নিয়ম)-1 : মনে করি , $a > 0$ এবং $a \neq 1$। অর্থাৎ যদি a যে কোনো বাস্তব সংখ্যা যা শূন্য থেকে বড় এবং 1 এর সমান নয় তবে,

(i) $\log_a 1 = 0$ অর্থাৎ ভিত্তি যাই হোক না কেন 1 এর লগারিদম সর্বদা 0 হবে । যেমন : $\log_{10} 1 = 0$, $\ln(1) = 0$

(ii) $\log_a a = 1$ অর্থাৎ যদি লগ এর সংখ্যা এবং ভিত্তি একই থাকে তবে তার মান সর্বদাই 1 হয়। যেমন : $\mathrm{Log}_4{}^4 = 1$

Rule - 2(i) : $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ অর্থাৎ শূন্য অপেক্ষা বড় যে কোনো দুটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদম সংখ্যাদ্বয়ের প্রতিটির পৃথক লগারিদমের সমান। [যেখানে $a > 0$, $a \neq 1$]

Rule - 2(ii) : $\log_a(MNP......) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + ...$

লক্ষণীয় যে, (i) $\log_a(M + N) \neq \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a(M - N) \neq \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a(MN) \neq \log_a M \times \log_a N$

Rule - 3 : $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$ অর্থাৎ একই ভিত্তিতে দুটি পৃথক সংখ্যার ভাগফলের লগারিদম হবে সংখ্যা দুটির লগারিদমের বিয়োগফল বা অন্তরফলের সমান।

লক্ষণীয় যে, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)\neq\frac{\log_a M}{\log_a N}$

Rule - 4 : $\log_a M^r = r\log_a M$ অর্থাৎ যে কোনো নির্দিষ্ট সূচক বা ঘাত বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদম হবে ঐ সূচক এবং লগারিদমের গুণফলের সমান।

লক্ষণীয় যে, $(\log_a M)^r \neq r\log_a M$

Rule - 5 (ভিত্তি পরিবর্তন) ঃ

(i) $\log_a M=\log_b M\times\log_a b$ $(b>0$ এবং $b\neq1)$

(ii) $\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$ [অথবা $\log_a M=\frac{\log M}{\log a}$]

Rule - 6 : যে কোনো ভিত্তিতে (i) $\log 0=-\infty$ হবে অর্থাৎ $\log_{10}0=-\infty$ $(\ln 0=-\infty)$ (ii) $\log\infty=\infty$

বিঃ দ্রঃ ভিত্তি দেওয়া না থাকলে, সর্বত্র একই ভিত্তি বিবেচনা করতে হবে।

সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm) ঃ 10 ভিত্তিক Logarithm (লগারিদম) কে সাধারণ লগারিদম Common Logarithm বলা হয়। একে হেনরি-ব্রিগস লগারিদমও বলা হয়।
সাধারণ লগারিদম $\text{Log}_{10}N$ হিসাবে প্রকাশ করা হয়। এলগারিদমের ভিত্তি না থাকলেও 10 ভিত্তি ধরে নেওয়া হয়। অর্থাৎ $\text{Log}N=\text{Log}_{10}N$

*ইংল্যান্ডের গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs : 1561 - 1630) ১৬২৪ সালে সর্বপ্রথম 10 ভিত্তিক লগারিদম প্রবর্তন করে লগ সারণি তৈরি করেন।

স্বাভাবিক বা প্রাকৃতিক লগারিদম (Natural Logarithm) ঃ 'e' ভিত্তিক লগারিদমকে স্বাভাবিক বা প্রাকৃতিক লগারিদম বলে। একে নেপিরিয়ান লগারিদম বলা হয়। স্বাভাবিক লগারিদমকে $\text{Log}_e N=\ln N$ আকারে প্রকাশ করা হয়।
[$\text{Log}_e N=\text{Lynn}N$ সংক্ষেপে $\ln N$ (লন N)]
এখানে 'e'একটি অমূলদ সংখ্যা। বিভিন্ন দশমিক স্থান পর্যন্ত 'e'এর আসন্ন মান নির্ণয় করা হয়।

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

$$\Rightarrow e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore e=2.71828182845904\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (John Napier : 1550 - 1617) ১৬১৪ সালে *e* ভিত্তিক লগারিদম প্রবর্তন করেন।

সুতরাং $N>0$ হলে N এর সাধারণ লগারিদম $\log_{10}N=x$ যেখানে $10^x=N$

এবং স্বাভাবিক লগারিদম $\log_e N=x$ যেখানে $e^x=N$

'*e*' ভিত্তিক লগারিদম ও 10 ভিত্তিক লগারিদমের মধ্যে সম্পর্ক :

(i) $\log_{10}N=\frac{\log_e N}{\log_e 10}=0.434294\times\ln N$ (ii) $\ln N=\log_e N=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}e}=2.30259\times\log N$

selftics # 4

লগারিদমের অর্থ ঃ মনে করি N একটি স্বাভাবিক সংখ্যা $(N > 0)$। একে ভিত্তি 10 এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে যদি 10 এর শক্তির সূচক x হয় অর্থাৎ $N = 10^x$ হয় তবে N সংখ্যাটির 10 ভিত্তিক লগারিদমের মান হলো x।

অর্থাৎ $x = \log_{10} N$ বা $x = \log N$

যেমন ঃ $\log_{10} 10 = \log_{10} 10^1 = 1$ $\qquad \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$ $\qquad \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4$

বি:দ্র:(Note)- লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে বীজগণিতীয় রাশির ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসাবে ধরা হয়। যেমন : $\text{Log}(x) = \text{Log}_e(x) = \ln(x)$ এবং $\text{Log}546 = \text{Log}_{10} 546$ ইত্যাদি।

লগারিদমের প্রয়োজনীয় সূত্রবলী ঃ

ধরি, $a > 0, a \neq 1;\ (b > 0, b \neq 1)$ এবং $M > 0, N > 0$

1(i) $\log_a 1 = 0 \qquad (\log_2 1 = 0, \log_{10} 1 = 0, \ln 1 = 0)$

1(ii) $\log_a a = 1 \qquad (\log_2 2 = 1, \log_{10} 10 = 1, \ln e = 1)$

2. $\log_a M^r = r\log_a M \qquad \left[(\log_a M)^r \neq r\log_a M\right]$

3(i) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N \qquad \left[\log_a (M+N) \neq \log_a M + \log_a N\right]$

3(ii) $\log_a (MNP......) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + ...$

3(iii) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N \qquad \left[\log_a (M-N) \neq \log_a M - \log_a N\right]$

4(i) $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ (ভিত্তি পরিবর্তন)

4(ii) $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

4(iii) $\log_a b \times \log_b a = 1$

4(iv) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

প্রতিলগ (Anti-logarithm) :

যদি $\log_a M = n$ হয়, তবে M কে n এর পতিলগ বলা হয়।

অর্থাৎ, $\log_a M = n$ হলে $M = \text{anti}\log_a(n)$

$\Rightarrow M = a^n$

$\therefore M = a^{\log_a M}$

ধরি, ভিত্তি $a = 10$ তাহলে, $\log_{10} M = n$ হলে

$M = \text{anti}\log_{10}(n)$

$\Rightarrow M = 10^n$

$\therefore M = 10^{\log_{10} M}$

ধরি, ভিত্তি $a = e$ তাহলে, $\log_e M = \ln(M) = n$ হলে

$M = \text{anti}\log_e(n) = \text{anti}\ln(n)$

$\Rightarrow M = e^n$

$\therefore M = e^{\ln(M)}$

যেমন : $\log_{10} 1000 = 3 \ \therefore \text{anti}\log_{10}(3) = 1000$ $\qquad \log_2 32 = 5 \ \therefore \text{anti}\log_2(5) = 32$

বীজগণিতের জনক মুহম্মদ ইবনে মুসা আল খারেজমীর নাম থেকে আজকের এলগরিদম (Algarithm) এবং লগারিদম (Logarithm) কথার উদ্ভব হয়েছে।